Miejsce na naklejkę

MMA-P1_1P-082

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

MAJ ROK 2008

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

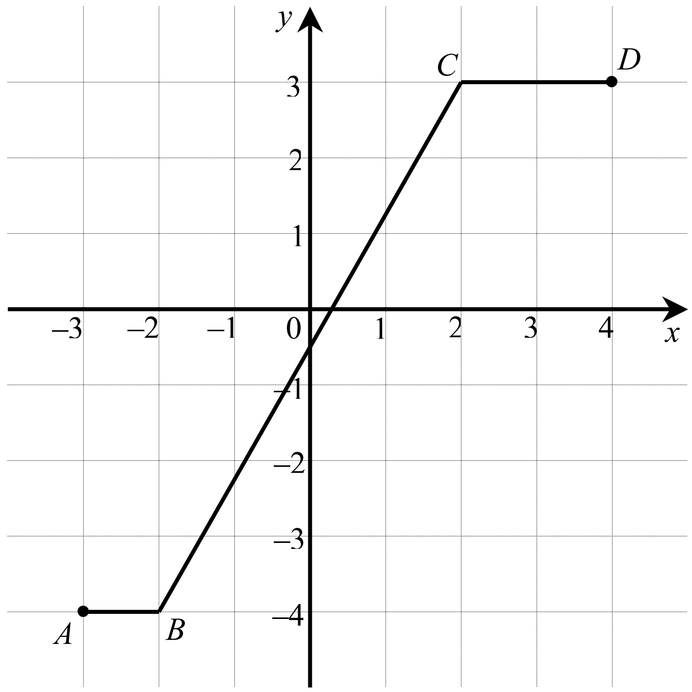
Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Na poniższym rysunku przedstawiono łamaną *ABCD*, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$.



Korzystając z tego wykresu:
a) zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f,
b) podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,
c) wyznacz równanie prostej BC,
d) oblicz długość odcinka BC.

a) Zbiór wartości funkcji f odczytuję z wykresu. Jest nim przedział $\langle -4, 3 \rangle$.

b) Zauważam, że $-3 < 1 - \sqrt{10} < -2$. *Z wykresu odczytuję, że w przedziale* $\langle -3, -2 \rangle$ *funkcja f jest stała i dla każdego argumentu z tego przedziału przyjmuje wartość* (-4), *zatem wartością funkcji f dla argumentu* $x = 1 - \sqrt{10}$ *jest* (-4), *co można zapisać* $f\left(1 - \sqrt{10}\right) = -4$.

c) Wyznaczam równanie prostej przechodzącej przez punkty $B = (-2, -4)$ *i* $C = (2, 3)$: $y - 3 = \frac{-4 - 3}{-2 - 2}(x - 2)$

stąd $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$.

Obliczam długość odcinka BC: $|BC| = \sqrt{\left(2 - (-2)\right)^2 + \left(3 - (-4)\right)^2} = \sqrt{65}$.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest n boków i $n \geq 3$ wyraża się wzorem $P(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

Wykorzystując ten wzór:

a) oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.

b) oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.

c) sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie:
Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.
Odpowiedź uzasadnij.

a) Do podanego wzoru podstawiam $n = 20$ *i otrzymuję* $P(20) = \frac{20 \cdot 17}{2} = 170$.

W dwudziestokącie wypukłym jest 170 przekątnych.

b) Zapisuję równanie uwzględniające treść tego podpunktu: $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$.

Jest ono równoważne równaniu kwadratowemu $n^2 - 13n = 0$, *którego rozwiązaniem są liczby* $n = 0$ *lub* $n = 13$.

Biorąc pod uwagę założenie, że $n \geq 3$ *formułuję odpowiedź*: *Wielokątem wypukłym, który ma 5 razy więcej przekątnych niż boków jest trzynastokąt.*

c) Powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe, ponieważ sześciokąt wypukły ma 9 przekątnych, czyli $P(6) = 9$.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $4^{23}x-32^{9}x=16^{4}\cdot\left(4^{4}\right)^{4}$.

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^{k}, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wszystkie liczby występujące w równaniu zapisuję w postaci potęgi o podstawie 2:

$$2^{46}x-2^{45}x=2^{16}\cdot 2^{32}$$

Po lewej stronie równania wyłączam wspólny czynnik przed nawias, a po prawej stronie wykonuję mnożenie:

$$2^{45}x\left(2-1\right)=2^{48}$$

$$2^{45}x=2^{48}$$

dzielę obie strony równania przez 2^{45} *i otrzymuję:*

$$x=2^{48}:2^{45}=2^{3}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 2^{3}.

Zadanie 4. ***(3 pkt)***
Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

Oznaczam literą x cenę jednego litra benzyny przed podwyżkami;

$1{,}1x$ *–cena jednego litra benzyny po pierwszej podwyżce;*

$1{,}05\cdot 1{,}1x$ *– cena jednego litra benzyny po obu podwyżkach.*

Zapisuję równanie: $1{,}05\cdot 1{,}1x = 4{,}62$

$$1{,}155x = 4{,}62$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 4$;

Cena jednego litra benzyny przed podwyżkami była równa 4 zł.

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.

b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x.

a) Rozwiązuję nierówność $2 - \frac{1}{n} < 1{,}975$.

Przekształcam ją do postaci równoważnej $\frac{1}{n} > 0{,}025$. *Nierówność tę zapisuję w postaci* $\frac{1}{n} > \frac{1}{40}$. *Jest ona spełniona gdy*: $n < 40$.

Ponieważ n jest liczbą naturalną, więc odpowiedź jest następująca: 39 wyrazów danego ciągu to liczby mniejsze od 1,975.

b) Korzystam ze związku między sąsiednimi wyrazami w ciągu arytmetycznym i zapisuję równanie: $\frac{a_2 + x}{2} = a_7$, *czyli* $x = 2a_7 - a_2$.

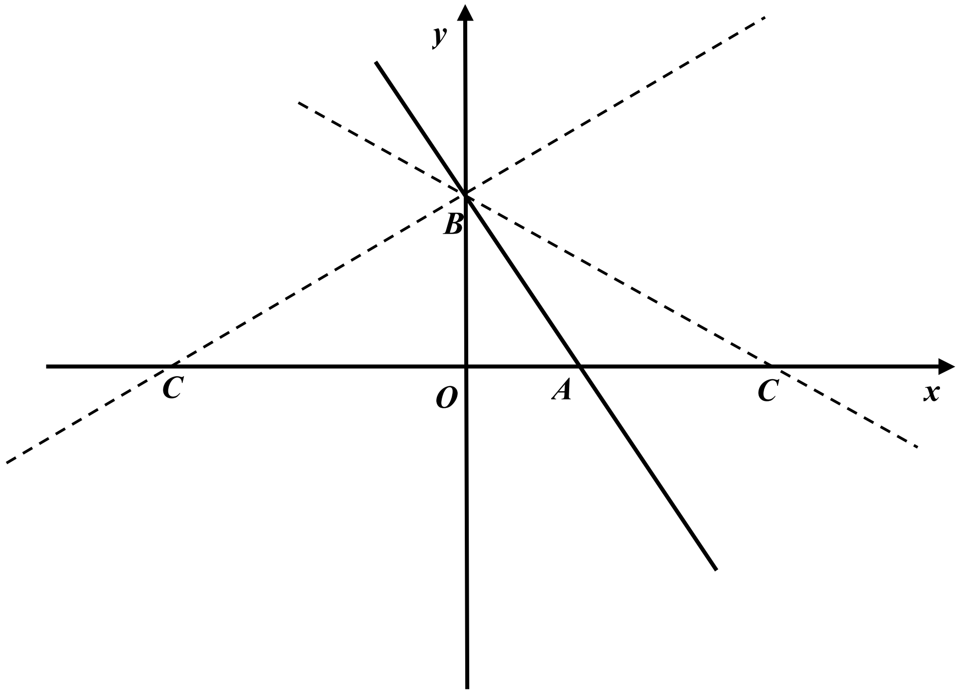
Obliczam potrzebne wyrazy: $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_7 = \frac{13}{7}$.

Wstawiam obliczone wartości do równania i otrzymuję $x = 2 \cdot \frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{31}{14}$.

Odpowiedź: *Trzywyrazowy ciąg* (a_2, a_7, x) *jest arytmetyczny dla* $x = \frac{31}{14}$.

Zadanie 6. ***(5 pkt)***
Prosta o równaniu $5x+4y-10=0$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punkcie A oraz oś Oy w punkcie B. Oblicz współrzędne wszystkich punktów C leżących na osi Ox i takich, że trójkąt ABC ma pole równe 35.

Wyznaczam współrzędne punktów A i B: $A=(2,0)$ *oraz* $B=\left(0,\frac{5}{2}\right)$.



Punkt C może leżeć z lewej lub z prawej strony punktu A. Przyjmując, że w obu przypadkach wysokością trójkąta ABC jest odcinek BO, którego długość jest równa $\frac{5}{2}$ *i korzystając z faktu, że pole trójkąta ABC równa się 35 zapisuję równanie:*

$$\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BO|=35$$

$$\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot\frac{5}{2}=35$$

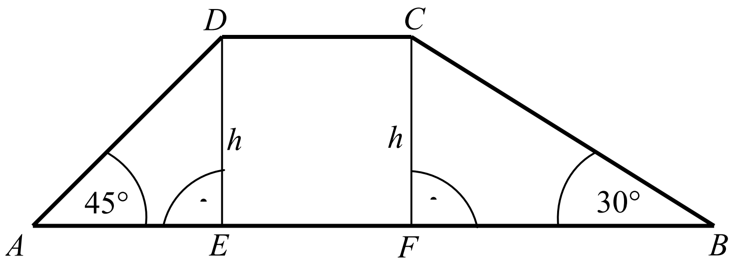
$$|AC|=28.$$

Ponieważ punkt $A=(2,0)$, *więc* $C=(30,0)$ *lub* $C=(-26,0)$.

Zadanie ma zatem dwa rozwiązania.

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45°. Oblicz wysokość tego trapezu.



Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym ($|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EDA| = 45^\circ$)*, więc* $|AE| = |ED| = h$.

Korzystam z własności trójkąta prostokątnego BFC i zapisuję zależność między przyprostokątnymi $\frac{|CF|}{|FB|} = \mathrm{tg}30^\circ$*, stąd* $|FB| = |CF| \cdot \sqrt{3}$, $|FB| = h\sqrt{3}$.

$|EF| = |DC| = 4$*, więc otrzymuję równanie*:

$|AE| + 4 + |FB| = 10$*, z którego po podstawieniu wyznaczonych wielkości otrzymuję*:

$$h + 4 + h\sqrt{3} = 10.$$

Obliczam wysokość trapezu:

$$h + h\sqrt{3} = 6$$

$$h\left(1+\sqrt{3}\right) = 6$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{3}+1} = 3\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Odpowiedź: *Wysokość trapezu jest równa* $3\left(\sqrt{3}-1\right)$ *cm.*

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$.

a) Sprawdź, czy punkt $A = (1, 30)$ należy do wykresu tego wielomianu.

b) Zapisz wielomian W w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

a) Obliczam $W(1)$:

$$W(1) = 1^3 - 5\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 45 = 32$$

$$W(1) \neq 30$$

Otrzymany wynik oznacza, że punkt A nie należy do wykresu wielomianu W.

b) Rozkładam wielomian na czynniki:

$$W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45 =$$

$$= x^3 - 9x - 5x^2 + 45 =$$

$$= x(x^2 - 9) - 5(x^2 - 9) =$$

$$= (x^2 - 9)(x - 5) =$$

$$= (x+3)(x-3)(x-5).$$

Odpowiedź: $W(x) = (x+3)(x-3)(x-5)$.

Zadanie 9. *(5 pkt)*

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=(2x+1)(x-2)$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

Zapisuję wzór funkcji w postaci ogólnej $f(x)=2x^2-3x-2$.

Wyznaczam odciętą wierzchołka paraboli: $x_w=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}$.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -2, 2\rangle$, *więc najmniejszą wartością funkcji f w tym przedziale jest druga współrzędna wierzchołka:* $y_w=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{25}{8}$.

Obliczam wartości funkcji na końcach przedziału: $f(-2)=12$, $f(2)=0$.

Największą wartością funkcji f w podanym przedziale jest $f(-2)=12$.

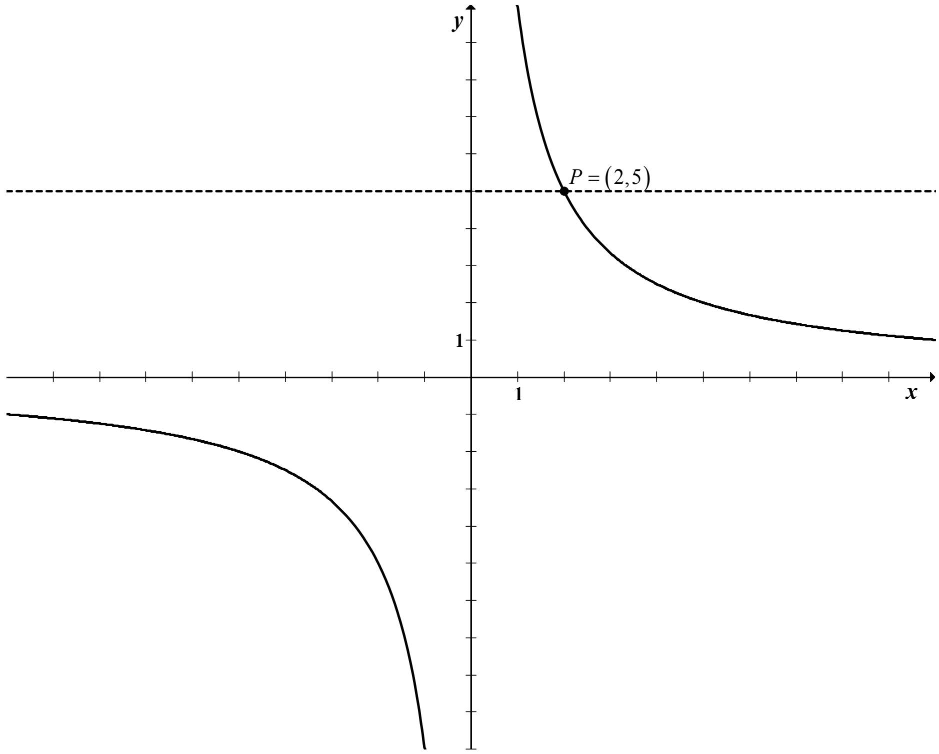
Odpowiedź: Najmniejszą wartością funkcji w podanym przedziale jest $y_w=-\frac{25}{8}$, *a największą* $f(-2)=12$.

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji h, określonej wzorem $h(x) = \frac{a}{x}$ dla $x \neq 0$.

Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $P = (2,5)$.

a) Oblicz wartość współczynnika a.
b) Ustal, czy liczba $h(\pi) - h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.
c) Rozwiąż nierówność $h(x) > 5$.



a) Korzystam z faktu, że punkt $P = (2,5)$ *należy do wykresu funkcji h i wyznaczam współczynnik a:* $5 = \frac{a}{2}$ *stąd* $a = 10$.

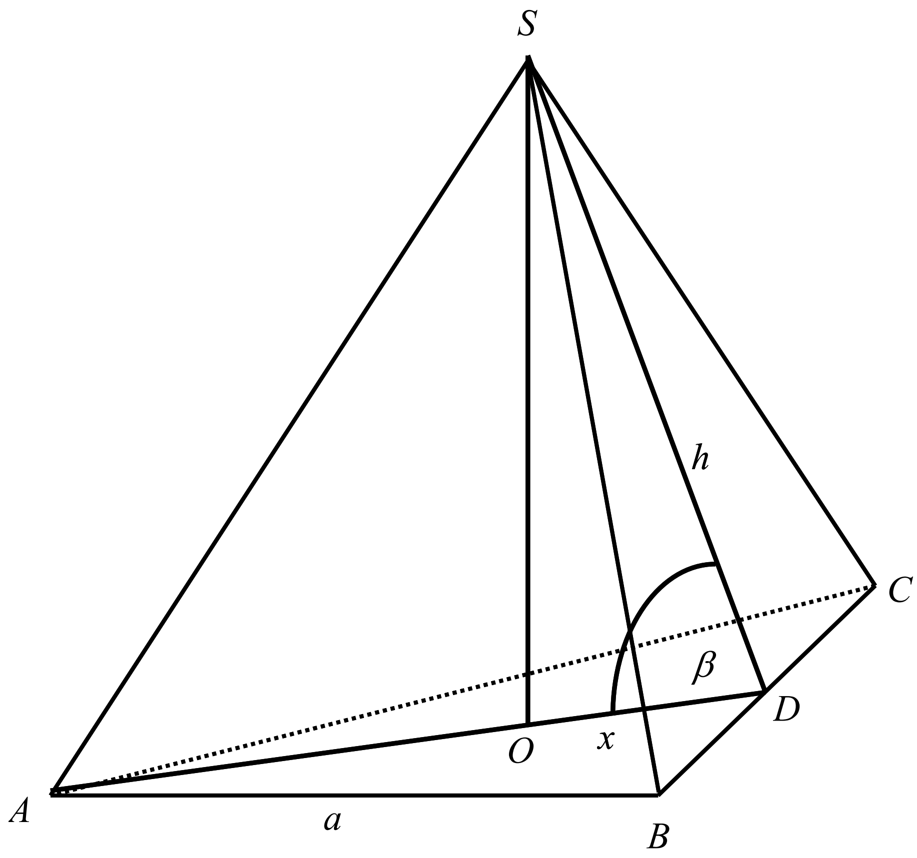
Funkcja h jest dana wzorem: $h(x) = \frac{10}{x}$.

b) Z wykresu odczytuję, że $h(-\pi) < 0$, *natomiast* $h(\pi) > 0$. *Stąd wynika, że* $h(\pi) - h(-\pi)$ *jest liczbą dodatnią.*

Z informacji podanej w zadaniu wiem, że wykres funkcji h przechodzi przez punkt $P = (2,5)$. *Odczytuję rozwiązanie nierówności* $h(x) > 5$ *z wykresu: jest to przedział* $(0,2)$.

Zadanie 11. ***(5 pkt)***

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem β. Oblicz $\cos\beta$ i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość β z dokładnością do $1°$.



Na rysunku zaznaczam kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy – β (punkt D jest środkiem odcinka BC).

Wprowadzam oznaczenie: h – wysokość ściany bocznej.

Zapisuję równanie opisujące pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$3\cdot\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, *z którego wyznaczam wysokość ściany bocznej ostrosłupa* $h=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Z trójkąta prostokątnego SOD, w którym $x=\left|OD\right|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ *– długość promienia okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa otrzymuję:* $\cos\beta=\frac{x}{h}$.

$$\cos\beta=\frac{x}{h}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{15}}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,4472.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych odczytuję miarę kąta: $\beta=63^\circ$.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

a) A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.
b) B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.
c) C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

Ω dla tego doświadczenia jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par, których wyrazy mogą się powtarzać i każdy z tych wyrazów może być jedną z liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Można ten zbiór opisać w tabelce:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$|\Omega| = 6^2 = 36$.

Zdarzeniu A sprzyja 9 zdarzeń elementarnych:

$\{(1,1),(1,3)(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$.

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Zdarzeniu B sprzyja 6 zdarzeń elementarnych. Łatwo je wypisać:

$\{(6,6),(6,5),(6,4),(5,6),(5,5),(4,6)\}$.

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia B: $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Zdarzeniu C sprzyjają dwa zdarzenia elementarne: $\{(6,5),(5,6)\}$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia C: $P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

BRUDNOPIS